حل ریاضی ۱

۱. می‌دانیم: $A-B=A\cap B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$. بنابراین:

$A'-B=A'\cap B'=(A\cup B)'$ و همین‌طور $B'-A=B'\cap A'=(A\cup B)'$

پس کافی است $n(A\cup B)$ را به‌دست آوریم و از آن متمم بگیریم.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+22-4=34$$

از طرف دیگر: $n((A\cup B)')=n(U-(A\cup B))=40-34=6$

پس: $n(A'-B)+n(B'-A)=6+6=12$

۲. چون داریم: $a_n=3^n$، بنابراین: $a_{n+2}=3^{n+2}$ و $a_{n+1}=3^{n+1}$.

در نتیجه: $3^{n+2}-3^{n+1}-6\times 3^n=3^n(9-3-6)=3^n\times 0=0$

۳. فرض می‌کنیم: $a_1=12$، $a_n=324$، $a_m=26244$.

$$\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}\Rightarrow\frac{26244}{324}=r^{m-n}\Rightarrow r^{m-n}=81$$

چون: $81=3^4=9^2$، دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$1)\quad r^{m-n}=3^4\xrightarrow{r=3}m-n=4\rightarrow\begin{cases}m=7\\n=3\end{cases}$$

$$2)\quad r^{m-n}=9^2\xrightarrow{r=9}m-n=2\rightarrow\begin{cases}m=4\\n=2\end{cases}$$

در حالت اول داریم: $r=3$، $a_1=12$:

۱۲, ۳۶, ۱۰۸, ۳۲۴, ۹۷۲, ۲۹۱۶, ۸۷۴۸, ۲۶۲۴۴

و حالت دوم داریم $r=9$ و $a_1=12$: ۱۲, ۱۰۸, ۹۷۲, ۸۷۴۸, ۷۸۷۳۲

که حالت دوم قابل قبول نیست، زیرا جمله‌های ۳۲۴ و ۲۶۲۴۴ در آن وجود ندارند.

۴. اگر a، b و c آن سه عدد باشند، در این صورت: $a+b+c=13$ و $b^2=a\times c$. از طرف دیگر: $a+2$ و $b+7$ و $c+8$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند؛ یعنی:

$$2(b+7)=a+2+c+8\Rightarrow a-2b+c=4$$

در این صورت یک دستگاه سه‌معادله و سه‌مجهول داریم:

$$\begin{cases}a+b+c=13\\a-2b+c=4\\b^2=a\times c\end{cases}$$

که اگر رابطهٔ ۲ را از ۱ کم کنیم، مقدار $b=3$ به‌دست می‌آید. پس:

$$\begin{cases}a+c=10\\a\times c=9\end{cases}$$

که در این صورت: $\begin{cases}a=1\\c=9\end{cases}$ و یا $\begin{cases}a=9\\c=1\end{cases}$ و دو دنباله به‌صورت ۹, ۳, ۱ و یا ۱, ۳, ۹ به‌دست می‌آید.

۵. می‌دانیم: $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ و $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$

بنابراین:

$$\frac{1+\tan x+\cot x}{1+\tan^2 x+\tan x}-\frac{\cot x}{1+\cot^2 x+\tan^2 x-\cot^2 x}$$

می‌دانیم: $\tan x.\cot x=1$، پس در مخرج کسر اول به‌جای عدد ۱ مساوی آن را مطابق فرمول گفته شده قرار می‌دهیم و در کسر دوم صورت و مخرج کسر را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1+\tan x+\cot x}{\tan x.\cot x+\tan^2 x+\tan x}-\frac{(\cot x)\tan x}{(1+\tan^2 x)\tan x}$$

$$\frac{(1+\tan x+\cot x)}{\tan x(\cot x+\tan x+1)}-\frac{1}{\tan x(1+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan x(1+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{1+\tan^2 x-1}{\tan x(1+\tan^2 x)}=\frac{\tan^2 x}{\tan x(1+\tan^2 x)}$$

$$=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x.\cos^2 x}{\cos x}=\sin x.\cos x$$

۶. وقتی می‌گوییم رابطه‌ای بین a و b وجود داشته باشد، به این معناست که نسبت‌های مثلثاتی α وجود نداشته باشد. مانند دستگاه دو معادله و دو مجهول عمل می‌کنیم و مقدار sinα و cosα را بر حسب a و b به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l}1\\2\end{array}\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=a\\\sin\alpha-\cos\alpha=b\end{cases}$$

$$+\quad 2\sin\alpha=a+b\Rightarrow\sin\alpha=\frac{a+b}{2}$$

$$\xrightarrow{1}\frac{a+b}{2}+\cos\alpha=a$$

$$\cos\alpha = a - \frac{a+b}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a-b}{2}$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$، پس:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین را در ۴ ضرب می‌کنیم}}$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4$$

که پس از ساده کردن داریم: $a^2 + b^2 = 2$.

۷.

$$\frac{\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\dfrac{\sin x\cos x + \sin x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x\sin x + \cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\sin x(\sin x\cos x + \sin x)}{\cos x(\cos x\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x(\cos x + 1)}{\cos^2 x(\sin x + 1)} = \tan^2 x\,\frac{(1+\cos x)}{(1+\sin x)}$$

از طرف دیگر: $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$، پس: $1+\cos x \ge 0$ و $1+\sin x \ge 0$، یعنی عبارت بالا همواره مثبت است.

حل حسابان ۱

۱. در قرارداد (الف)، فرد برای ۶۴ روز کاری ۶۴۰ میلیون ریال دریافت می‌کند. در قرارداد (ب)، دریافتی‌های فرد دنباله‌ای هندســـی با قدر نسبت ۲ و تعداد جملات ۶۴ می‌سازد که مجموع دریافتی‌ها برابر است.

$$\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

عدد 2^{64} عدد بزرگی است. در مقام مقایسه داریم:

$$100 < 2^{10} = 1024$$

$$10^3 < 2^{10} \Rightarrow (10)^3 < 2^{60} \Rightarrow 8\times 10^{18} < 2^{64}$$

$$\frac{8\times 10^{18}}{64\times 10^6} = \frac{1}{8}\times 10^{11} > 10^{10}$$

و این بدان معنی است که در قرارداد (ب)، فرد حداقل ده میلیارد برابر حالت (الف) دستمزد می‌گیرد!

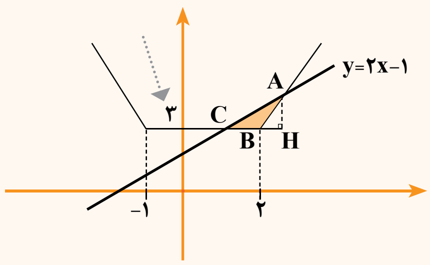
۲. طرفین معادلهٔ $x^2+2x-4=0$ را در x ضرب می‌کنیم (واضح است که $x \neq 0$). داریم: $x^3+2x^2-4=0$ و از آنجا $x^3 = -2x^2+4x$

از آنجا که β یک جواب معادله درجهٔ دوم مفروض است، پس: $\beta^3 = -2\beta^2+4\beta$.

حال اگر در رابطهٔ $\alpha^3 - 2\beta^2 + 4\beta$ عبارت β^3 را جایگزین $-2\beta^2+4\beta$ کنیم، حاصل عبـــارت حکم مـــورد نظر $\alpha^3+\beta^3$ خواهد بـــود. با فرض $\alpha+\beta = S = -2$ و $\alpha\beta = p = -4$ داریم:

$$\alpha^3+\beta^3 = s^3 - 3ps = (-2)^3 - 3(-4)(-2) = -32$$

۳. ریشه‌های عبارت‌های داخل قدر مطلق‌ها را به‌دست می‌آوریم. ضابطهٔ تابع را به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای می‌نویسیم.



$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & x < -1 \\ 3 & -1 \le x \le 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$$

ناحیهٔ محصور، مثلث ABC در شکل ۲ خواهد بود. کافی است طول قاعدهٔ AB را در ارتفاع وارد بر آن، یعنی CH به‌دست آوریم:

$$A:\begin{cases} y = x+2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x_A = 1$$

$$B:\begin{cases} y = 2x-1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x_B = 2$$

$$AB = 1$$

$$C:\begin{cases} y = x+2 \\ y = 3x-1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 5 \Rightarrow CH = 5-3 = 2$$

$$S_{ABC} = \frac{2\times 1}{2} = 1 \quad \text{واحد سطح}$$

۳. **الف)** فرض کنیم: $f(x) = ax^6 + bx + c$. چون نمودار محور y ها را در $y=3$ قطع کرده است، پس $c=3$. از طرف دیگر، نقطهٔ $(-1$ و $-2)$ رأس سهمی است. پس در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند و داریم:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = 4a - 2b + 2 \Rightarrow 2a - b = -2 \\ \text{طول نقطهٔ رأس سهمی } x = \dfrac{-b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2a - 4a = -2 \Rightarrow a = 1, b = 4$$

$$f(1) = x^6 + 4x + 2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

ب)

$$(f(x)-6)(f(x)-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 6 \Rightarrow x^6+4x+2 = 6 \Rightarrow x^6+4x-2 = 0 \\ f(x) = 1 \Rightarrow x^6+4x+2 = 1 \Rightarrow x^6+4x+2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-4\pm\sqrt{28}}{2} = -2\pm\sqrt{7} \\ x = \dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{2} = -2\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

۴. نقطهٔ دلخواه M را روی خط $y=۲x$ در نظر می‌گیریم. پس $M(a,۲a)$:
حال باید داشته باشیم: $OM+AM=۵$

$$\sqrt{(۰-a)^۲+(۰-۲a)^۲}+\sqrt{(۲-a)^۲+(۴-۲a)^۲}=۵$$

$$\sqrt{۵}\,|a|+\sqrt{۵}\,|۲-a|=۵\Rightarrow |a|+|۲-a|=\sqrt{۵}$$

پس از حل معادلهٔ قدرمطلقی فوق داریم: $a=۱\pm\frac{\sqrt{۵}}{۲}$:
در نتیجه:

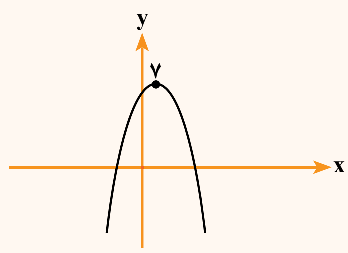
$$M(۱-\frac{\sqrt{۵}}{۲},۲-\sqrt{۵}),M'(۱+\frac{\sqrt{۵}}{۲},۲+\sqrt{۵})$$

مسئله دو جواب دارد.

۶. مخرج کسر فقط یک ریشه برابر ۱ دارد. پس مخرج مربع کامل است و باید به‌صورت $(x-۱)^۲$ و یا $k(x-۱)^۲$ باشد. از طرف دیگر، ضریب $x^۲$ در مخرج برابر یک است. پس: k=۱ و باید داشته باشیم: $x^۲+ax+b=(x-۱)^۲$.
در نتیجه: a =۲ و b =۱.

۷. اگـر x را بـه x- تبدیـل کنیـم، داریـم: $f(x)+f(۲)=-۴x^۲+x$.
کافی است f(۲) را محاسبه کنیم. با فرض x=۲ داریم:

$$f(۲)+f(۲)=-۱۶+۲\Rightarrow f(۲)=-۷$$

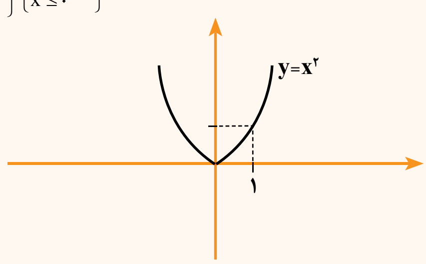


با جایگزینی داریم: $f(x)-۷=-۴x^۲+x$
و در نتیجه $f(x)=-۴x^۲+x+۷$

نمودار تابع f یک سـهمی به‌صورت شکل ۳ است. (توجه کنید که رأس سهمی نقطهٔ $(\frac{۱}{۸},\frac{۱۱۳}{۱۶})$ است.)

۸. اگر: $x\geq ۱$، آن‌گاه: $x^۲\geq x$ و اگر: $۰<x<۱$، آن‌گاه: $x^۲<x$.
و اگر: $x\leq ۰$، آن‌گاه: $x^۲\geq x$.

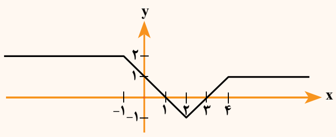
$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۱\\ x & ۰<x<۱\\ x^۲ & x\leq ۰\end{cases}$$



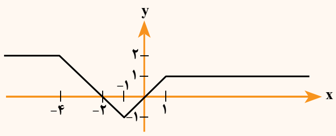
حل حسابان ۲

۱. نمودار تابع $y=f(-۲x+۳)$ را رسم می‌کنیم.
برای رسـم تابع $y=f(ax+b)$ براساس نمودار تابع $y=f(x)$، ابتدا نمودار $y=f(x+b)$ و سـپس نمودار $f(ax+b)$ را با انبساط یا انقباض طولی رسم می‌کنیم. بنابراین برای رسم تابع $y=f(-۲x+۳)$ راه حل زیر را انجام می‌دهیم:

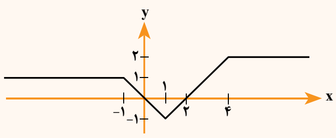
الف) نمودار داده شده را یک به واحد به سمت راست منتقل می‌کنیـم تا نمـودار $f(x)$ به دست آید.



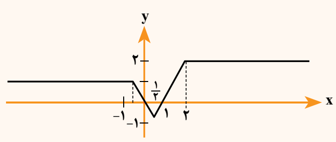
ب) نمـودار $y=f(x+۳)$ را بـا انتقال نمـودار f به اندازهٔ ۳ واحد به سـمت چپ رسـم می‌کنیم.



ج) بـا قرینه کـردن نمودار نسـبت به محور yهـا، نمودار $y=f(-x+۳)$ را مشـخص می‌کنیم.



د) بـه کمک انقبـاض افقی نمـودار، یعنـی تقسـیم تمام عددهای ۱- و ۲و۴ بر ۲، نمودار $y=f(-۲x+۳)$ مشخص می‌شود.



بنابراین نمودار تابع $y=f(-۲x+۳)$ در بازهٔ $\left[-\frac{۱}{۲},۲\right]$ ثابت نیست.

۲. با توجه به رابطهٔ $\cos ۲x=۲\cos^۲x-۱$:

$$۴^{۲\cos^۲x-۱}+۴^{\cos^۲x}=۳\ \underset{۴^{\cos^۲x}=t}{\Rightarrow}\ \frac{۱}{۴}t^۲+t-۳=۰\Rightarrow t_۱=-۶$$

$$t_۲=۲\Rightarrow ۴^{\cos^۲x}=-۶\ \Rightarrow ۴^{\cos^۲x}=۲\Rightarrow \cos^۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

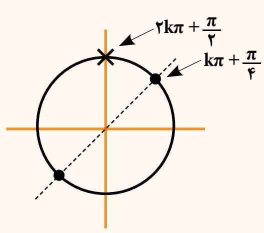
$$\cos^۲x=\cos^۲\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$$

بنابراین، $x=\frac{\pi}{۴}$ تنها جواب معادله در $\left[\frac{۳}{۴},۱\right]$ است، زیرا: $\frac{۳}{۴}<\frac{\pi}{۴}<۱$.

۳.

$$\sin x+\sin ۲x+.....+\sin nx=n$$

$$\begin{cases}\sin x=۱\\ \sin ۲x=۱\\ \circ\\ \circ\\ \circ\\ \sin nx=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}(۱)\\ x=k\pi+\frac{\pi}{۴}(۲)\\ \circ\\ \circ\\ x=\frac{۲k\pi}{n}+\frac{\pi}{۲n}\end{cases}\xrightarrow[\text{جواب‌ها}]{\text{اشتراک میان}}$$



با توجه به آنکه ۱ و ۲ اشتراک ندارند، پس معادلهٔ فوق جواب ندارد.

۴. با توجه به تعریف تابع متناوب

$\exists T > ۰, \forall x \in D_f , x \pm T \in D_f , f(x \pm T) = f(x)$

باید به دنبال $T > ۰$ باشیم که معادلهٔ $f(x \pm T) = f(x)$ را برقرار کند:

$\sin(x \pm T)^۲ = \sin^۲ x^۲ \Rightarrow (x \pm t)^۲ = x^۲$ غقق

$\Rightarrow x^۲ + t^۲ \pm ۲tx = x^۲ \Rightarrow t^۲ \pm ۲tx = ۰ \begin{cases} t = ۰ \\ t \neq ۲x = ۰ \end{cases}$

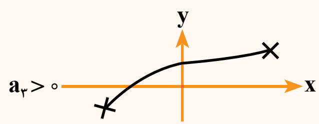
$\Rightarrow t = ۲x$ یا $t = -۲x$

با توجه به آنکه t برحسب x به‌دست می‌آید، نمی‌تواند تابع متناوب باشد.
بنابراین این تابع متناوب نیست.

۵. هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + ... + a_۱ x + a_۰$
را یک چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. در حالت $n = ۳$ داریم:

$f(x) = a_۳ x^۳ + a_۲ x^۲ + a_۱ x + a_۰$

با توجه به آنکه دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است و تابع به ازای همهٔ مقادیر حقیقی تعریف می‌شود:



اگر $a_۳ > ۰$، مقدار تابع به ازای مقادیر بسیار بزرگ، مثبت و به ازای مقادیر بسیار کوچک منفی است. پس نمودار تابع باید از محور xها عبور کند. برای $a_۳ < ۰$ نیز اثبات به همین صورت برقرار است.
همین استدلال را برای هر مقدار n فرد می‌توان در نظر گرفت. (؟)

۶. با توجه به قضیهٔ تقسیم:

$x^{۱۵} + x^۳ + ۲x - ۱۱ = (x+۱)Q(x) + R$

$\underset{x=-۱}{\Rightarrow} -۱ - ۱ - ۲ - ۱۱ = ۰ + R \Rightarrow \underline{R = -۱۵}$

$\Rightarrow x^{۱۵} + x^۳ + ۲x - ۱۱ = (x+۱)Q(x) - ۱۵$

برای آنکه در یک چندجمله‌ای مجموع ضرایب را مشخص کنیم، باید به جای x مقدار $x = ۱$ را قرار دهیم. (چرا؟)

بنابراین:

$\underset{x=۱}{\Rightarrow} ۱ + ۱ + ۲ - ۱۱ = ۲Q(۱) - ۱۵ \Rightarrow \underline{Q(۱) = ۴}$

حل هندسهٔ ۳

۱. $A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹-۶ & -۱۸+۱۲ \\ ۳-۲ & -۶+۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۶ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} = A$

اگر در $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داشته باشیم: $A = \begin{cases} ad = bc \\ a + d = ۱ \end{cases}$، آنگاه $A^n = A$.

۲. $A^۲ = \begin{bmatrix} \cos^۲\theta - \sin^۲\theta & -۲\sin\theta.\cos\theta \\ ۲\sin\theta.\cos\theta & -\sin^۲\theta + \cos^۲\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos ۲\theta & -\sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & \cos ۲\theta \end{bmatrix}$

$A^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$

۳. $|A| = ad - bc, \ |B| = ad + ۳ac - bc - ۳ac = ad - bc$

$|C| = ad - ۴ab - bc + ۴ab = ad - bc \Rightarrow |A| = |B| = |C|$

هر گاه در یک ماتریس مربعی، مضربی از یک ستون (سطر) را به ستون (سطر) دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

۴. $A \times B = B \times A \Rightarrow \begin{cases} bp = nc \\ n(a-d) = b(m-q) \\ p(a-d) = c(m-q) \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{a-d}{m-q}$

$b = ۰ \Leftrightarrow n = ۰ \quad , \quad \frac{c}{p} = \frac{a-d}{m-q}$

$c = ۰ \Leftrightarrow p = ۰ \quad , \quad \frac{b}{n} = \frac{a-d}{m-q}$

$a = d \Leftrightarrow m = q \quad , \quad \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

حل آمار و احتمال و ریاضیات گسسته

۱. الف) چون $p \not\equiv q$، پس: $(p \Leftrightarrow q) \equiv F$ و گزارهٔ داده‌شــــده به انتفای مقدم همواره درست است.

ب) چـــون $q \equiv F$، پس: $(q \Rightarrow r) \equiv F$ و چون $p \equiv T$، گزارهٔ داده شــده نادرست است.

ج) چون $q \equiv F$، پس: $(q \wedge p) \equiv F$ و لذا گزارهٔ داده‌شده (به انتفای مقدم) همواره درست است.

د) چـــون $\sim q \equiv T$، پـــس: $(\sim q \vee r) \equiv T$ و چـــون: $\sim p \equiv F$، پـــس: $(\sim p \wedge r) \equiv F$ و گزارهٔ داده‌شده نادرست است.

۲. الف) تســـاوی داده‌شـــده برقرار نیســـت. با مجموعه‌های $A = \{۱, ۲, ..., ۷\}$، $B = \{۳, ۴\}$ و $C = \{۴, ۵, ۶\}$ می‌توانید مثال نقض ارائه کنید.

ب) تساوی برقرار است:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' =$$
$$(A \cap B) \cap (A' \cup C') = \left[(A \cap B) \cap A'\right] \cup \left[(A \cap B) \cap C'\right]$$
$$= \left[(B \cap A) \cap A'\right] \cup \left[A \cap (B \cap C')\right]$$
$$= \left[B \cap \underbrace{(A \cap A')}_{\phi}\right] \cup \left[A \cap (B - C)\right]$$
$$= \phi \cup \left[A \cap (B - C)\right] = A \cap (B - C)$$

ج) تساوی برقرار است:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$
$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$
$$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$$
$$= [\underbrace{(A \cap A')}_{\phi} \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\phi}]$$
$$= (B \cap A') \cup (A \cap B') = (B - A) \cup (A - B)$$
$$= (A - B) \cup (B - A)$$

۳. فرض کنیم: $A \times \phi \neq \phi$، پس داریم: $(x, y) \in A \times \phi$ که بنا به تعریف ضرب دکارتی باید $x \in A$ و $y \in \phi$ که $y \in \phi$ تناقض اســـت. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴. در ایـــن اثبات همواره داریم: $a - b = \left(\frac{n+۱}{۲}\right) - \left(\frac{n-۱}{۲}\right) = \frac{۲}{۲} = ۱$. لذا عدد n به صورت $n = (a+b) \times ۱$ تجزیه می‌شـــود که تجزیه‌ای است بدیهی برای هر عدد طبیعی و عددهای اول نیز می‌توانند به صورت $P = P \times ۱$ تجزیه شوند.

۵. ابتدا جدول مربوط به روزهای هفته با فرض متناظر کردن سه‌شـــنبه با عدد صفر را تشـــکیل دهیم. پس از محاسبهٔ اختلاف دو روز داده‌شده (هفدهم تیر و دوم فروردین) و پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقســـیم این عدد بر ۷، از روز سه‌شنبه به عقب برمی‌گردیم تا به روز متناظر با باقی‌ماندهٔ به‌دست‌آمده برسیم.

اختلاف دو روز $= \overset{\text{فروردین}}{۲۹} + \overset{\text{اردیبهشت}}{۳۱} + \overset{\text{خرداد}}{۳۱} + \overset{\text{تیر}}{۱۷} = ۱۰۸$

$۱۰۷ \overset{۷}{\equiv} ۳$

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۴	۵	۶	۰	۱	۲	۳

و چون عدد ۳ متناظر با شنبه است، پس دوم فروردین شنبه بوده است.

۶. می‌دانیم مربع هر عدد فرد به این شکل است: $(۸k+۱)$. پس: $x^۲ = ۸k + ۱$ یا $x^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$.

بنابراین: $x^۴ \overset{۸}{\equiv} ۱$ (طرفین به توان ۲ رسیده) و داریم:

۷.

$$a^m \mid b^n \Rightarrow b^n = a^m q \overset{m>n}{=} a^n \times (a^{m-n} q_۱) = a^n q_۲ \Rightarrow a^n \mid b^n \overset{\text{فرض}}{\Rightarrow} a \mid b$$

$$۴x^۴ + ۱۱x^۲ + ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow \underbrace{۴ \times ۱ + ۱۱ \times ۱}_{۱۵} + ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۱۰,$$

$$۱۵ \overset{۸}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۱۱ \overset{۸}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۱۳x \overset{۸}{\equiv} ۳ - ۱۶ \Rightarrow ۱۳x \overset{۸}{\equiv} -۱۳ \Rightarrow x \overset{۸}{\equiv} -۱$$